

Делимость чисел. Простые и составные числа.

Оглавление

Оглавление.....	1
Делимость натуральных чисел.....	2
Основная теорема арифметики.....	3
Признаки делимости.....	3
Утверждения, связанные с делимостью чисел.....	3
Устные задачи.....	4
«Полуустные» задачи.....	4
Когда до полного числа десятков.....	6
Задачи на делимость сумм:.....	8
Нестандартные задачи.....	10
Некоторые задачи из учебников.....	13
Сравнения.....	16
Малая теорема Ферма.....	16
Решение уравнений в целых числах.....	20
Список литературы:.....	23

Одной из целей математического образования, нашедшей отражение в федеральном компоненте государственного стандарта по математике, является интеллектуальное развитие учащихся.

Тема «Делимость чисел. Простые и составные числа» – одна из таких тем, которые, начиная с 5 класса, позволяют в большей степени развивать математические способности детей. Работая в школе с углубленным изучением математики, физики и информатики, где обучение ведется с 7 класса, кафедра математики нашей школы заинтересована в том, чтобы ученики уже в 5-7 классах более подробно знакомились с данной темой. Мы стараемся это реализовать на занятиях в школе юных математиков (ШЮМ), а также в региональном летнем математическом лагере, где вместе с учителями нашей школы преподаю и я. Я постаралась подобрать такие задачи, которые интересны учащимся с 5 по 11 класс. Ведь ученики нашей школы изучают данную тему по программе. А выпускники школы последние 2 года встречаются с задачами по этой теме на ЕГЭ (в задачах типа С6). Теоретический материал в различных случаях рассматриваю в разном объеме.

Делимость натуральных чисел.

Некоторые определения:

Говорят, что натуральное число a делится на натуральное число b , если существует такое натуральное число c , что $a=bc$. При этом пишут: $a:b$. В этом случае b называют делителем числа a , а a — кратным числа b .

Натуральное число называется *простым*, если у него нет делителей, отличных от него самого и от единицы (например: 2, 3, 5, 7 и т. д.).

Число называется *составным*, если оно не является простым.

Единица не является ни простым, ни составным.

Число n делится на простое число p в том и только в том случае, если p встречается среди простых множителей, на которые разлагается n .

Наибольшим общим делителем чисел a и b называется наибольшее число, одновременно являющееся делителем a и делителем b , обозначается НОД ($a;b$) или $D(a;b)$.

Наименьшим общим кратным называют наименьшее число, делящееся и на a , и на b , обозначается НОК ($a;b$) или $K(a;b)$.

Числа a и b называют *взаимно простыми*, если их наибольший общий делитель равен единице.

Основная теорема арифметики

Всякое натуральное число n единственным образом (с точностью до порядка множителей) раскладывается в произведение степеней простых сомножителей:

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$$

здесь $p_1, p_2, \dots, p_m$ — различные простые *делители* числа n , а $k_1, k_2, \dots, k_m$ — степени вхождения (степени кратности) этих делителей.

Признаки делимости

- Число делится на 2 тогда и только тогда, когда последняя цифра делится на 2 (то есть четная).
- Число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3.
- Число делится на 4 тогда и только тогда, когда двузначное число, составленное из двух последних цифр, делится на 4.
- Число делится на 5 тогда и только тогда, когда последняя цифра делится на 5 (то есть равна 0 или 5).
- Чтобы узнать, делится ли число на 7 (на 13), надо разбить его десятичную запись справа налево на группы по 3 цифры в каждой (самая левая группа может содержать 1 или 2 цифры), после чего взять группы с нечетными номерами со знаком «минус», а с четными номерами — со знаком «плюс». Если полученное выражение делится на 7 (на 13), то и заданное число делится на 7 (на 13).
- Число делится на 8 тогда и только тогда, когда трехзначное число, составленное из трех последних цифр, делится на 8.
- Число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма цифр делится на 9.
- Число делится на 10 тогда и только тогда, когда последняя цифра — ноль.
- Число делится на 11 тогда и только тогда, когда сумма его цифр, стоящих на четных местах в десятичной записи, и сумма его цифр, стоящих на нечетных местах в десятичной записи, дают одинаковые остатки при делении на 11.

Утверждения, связанные с делимостью чисел.

- Если $a:b$ и $b:c$, то $a:c$.
- Если $a:m$, то и $ab:m$.
- Если $a:m$ и $b:m$, то $a+b:m$.
- Если $a+b:m$ и $a:m$, то и $b:m$.
- Если $a:m$ и $a:k$, причем m и k взаимно просты, то $a:mk$.
- Если $ab:m$ и a взаимно просто с m , то $b:m$.

- На занятиях по данной теме в зависимости от возраста учеников, места и времени проведения занятий, я рассматриваю различные задачи. Подбираю эти задачи, в основном, из источников, которые указаны в конце работы, в том числе и из материалов Пермского регионального турнира юных математиков прошлых лет и материалов II и III этапов Российской олимпиады школьников по математике прошлых лет.

Следующие задачи использую для проведения занятий в 5, 6, 7 классах в ШЮМ¹е при прохождении темы «Делимость чисел. Простые и составные числа. Признаки делимости».

Устные задачи.

1. К числу 15 слева и справа припишите по 1 цифре так, чтобы число делилось на 15.
Ответ: 1155, 3150, 4155, 6150, 7155, 9150.
2. К числу 10 слева и справа припишите по 1 цифре так, чтобы число делилось на 72.
Ответ: 4104.
3. Некоторое число делится на 6 и на 4. Обязательно ли оно делится на 24?
Ответ: нет, например, 12.
4. Найдите наибольшее натуральное число, кратное 36, в записи которого участвуют все цифры по 1 разу.
Ответ: 9876543120.
5. Дано число $645*7235$. Замените * цифрой так, чтобы полученное число стало кратно 3. Ответ: 1, 4, 7.
6. Дано число $72*3*$. Замените * цифрами так, чтобы полученное число стало кратно 45. Ответ: 72630, 72135.

«Полуустные» задачи.

1. Сколько воскресений может быть в году?
2. В некотором месяце три воскресенья пришлись на четные числа. Какой день недели был 7 числа этого месяца?
3. Начнем считать пальцы рук следующим образом: первым пусть будет большой палец, вторым – указательный, третьим – средний, четвертым – безымянный, пятым – мизинец, шестым – снова безымянный, седьмым – средний, восьмым – указательный, девятым – большой, десятым – указательный палец и т.д. Какой палец будет 2000-м?

¹ ШЮМ – Школа Юных Математиков – субботняя школа при ФМШ №146

4. При каких n число $\underbrace{1111\dots111}_n$ делится на 7?
5. При каких n число $\underbrace{1111\dots111}_n$ делится на 999 999 999?
6. Дробь $\frac{a}{b}$ – сократима. Будет ли сократима дробь $\frac{a-b}{a+b}$?
7. В стране Анчурии в обращении имеются купюры достоинством 1 анчур, 10 анчуров, 100 анчуров, 1000 анчуров. Можно ли отсчитать 1 000 000 анчуров с помощью 500 000 купюр?
8. Найдите двузначное число, первая цифра которого равна разности между этим числом и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке.

Решения:

1. В году может быть 365 или 366 дней, каждый седьмой день – воскресенье, значит, $365=52\cdot7+1$ или $366=52\cdot7+2$, их может быть 52, или 53, если воскресенье пришлось на 1 число.
2. Эти 3 воскресенья пришлись на 2, 16 и 30 числа. Значит, 7 число этого месяца будет пятницей.
3. Количество пальцев при счете будут повторяться с периодом 8, значит, достаточно посчитать остаток от деления 2000 на 8. Он равен 0. Т.к. восьмым идет указательный палец, то и 2000-ым будет указательный палец.
4. Будем делить $\underbrace{1111\dots111}_n$ на 7 «уголком». Числа 1, 11, 111, 1111, 11111 не делятся нацело на 7, а $111111=7\cdot15873$. Отсюда следует, что если в записи данного числа больше 6 единиц, то после каждой 6 единицы очередной остаток равен 0. Т.о., число вида $\underbrace{1111\dots111}_n$ делится на 7 тогда и только тогда, когда количество его цифр делится на 6, т.е. $n=6\cdot t$, где $t\in\mathbb{Z}$.
5. Число $\underbrace{1111\dots111}_n$ делится на 999 999 999, если оно делится на 111 111 111 и на 9 одновременно. В данном числе количество единиц кратно 9. Однако первое и второе такие числа 111 111 111 и 111 111 111 111 111 111 не делятся на 999 999 999. А число, в котором 18 единиц, делится на 999 999 999. При этом, начиная с 18-го, каждое 18-ое число делится на 999 999 999, т.е. $n=18\cdot t$, где $t\in\mathbb{N}$.
6. Дробь $\frac{a}{b}$ – сократима, т.е. $a=bn$, где $n\in\mathbb{Z}$. Тогда перепишем дробь $\frac{a-b}{a+b}$ в виде
$$\frac{bn-b}{bn+b} = \frac{b(n-1)}{b(n+1)} = \frac{n-1}{n+1}$$
. Очевидно, что дробь $\frac{a-b}{a+b}$ сократима.
7. Пусть было a купюр достоинством в 1 анчур, b – достоинством в 10 анчуров, c – достоинством в 100 анчуров и d – достоинством в 1000 анчуров. Получим

систему:
$$\begin{cases} a + 10b + 100c + 1000d = 1000000 \\ a + b + c + d = 500000 \end{cases}$$
 . Из первого уравнения следует, что a

кратно 10, т.е. $a=10n$. Тогда
$$\begin{cases} 10n + 10b + 100c + 1000d = 1000000 \\ 10n + b + c + d = 500000 \end{cases}$$
,

$$\begin{cases} n + b + 10c + 100d = 100000 \\ 10n + b + c + d = 500000 \end{cases}$$
 . Вычтем из второго уравнения первое, получим $9n - 9c - 99d = 400\,000$. Левая часть уравнения кратна 9, а правая – нет. Получили противоречие. Значит, отсчитать 1 000 000 анчуров с помощью 500 000 купюр невозможно.

8. Пусть $\overline{ab}$ – данное число, тогда $10a+b-(10b+a)=a$, $8a=9b$, значит, $a:9$, $b:8$. Поскольку речь идет о цифрах двузначного числа, то $a=9$, $b=8$. Проверка: $98-89=9$.

Когда до полного числа десятков...

На занятиях в ШЮМ, в летнем краевом математическом лагере есть возможность рассмотреть с детьми больше интересных задач, в том числе и занимательные задачи.

1. Когда до полного числа десятков не хватило 2 яйца, их пересчитали дюжинами (по 12 штук). Осталось 8 яиц. Сколько было яиц, если их больше 300, но меньше 400?
2. Крестьянка несла на базар в корзине яйца. Проезжающий мимо всадник нечаянно толкнул ее, и все яйца разбились. На вопрос, сколько было яиц, она ответила: «Когда я их раскладывала по 2, то одно яйцо осталось. То же самое произошло, когда я их раскладывала по 3, по 4, по 5 и по 6. Когда я их разложила по 7, то остатка не оказалось». Сколько было яиц у крестьянки?
3. Когда солдаты строились в колонну по 4, по 5 или по 6, каждый раз один оставался лишним, а когда построились в колонну по 7, лишних не осталось. Сколько было солдат?
4. 12 разбойников напали на Буратино, у которого было около 30000 золотых, и отобрали все его богатство. Когда они решили разделить добычу поровну, то оказалось, что один золотой остался лишним. Из-за него разбойники передрались, и ненароком убили одного своего товарища. После этого оставшиеся 11 разбойников снова стали делить добычу, но опять один золотой остался. И снова разбойники передрались, и в драке опять был убит один разбойник. Так продолжалось до тех пор, пока не осталось 6 разбойников. Тогда самый умный из них, который все время стоял в стороне и думал, сказал: «Дальше все будет то же самое! Давайте вернем один золотой Буратино, чтобы о нас не говорили, что мы отбираем все подчистую, а остальное разделим». Его

сообщники с ним согласились. а) Смогут ли теперь они разделить деньги поровну? б) Сколько денег было у Буратино?

5. Числа 100 и 90 разделили на одно и то же число. В первом случае получили в остатке 4, а в другом – 18. Какое число было делителем?

Решения:

1. При счете десятками не хватало 2 яиц до полного десятка. Значит, оставалось 8 яиц, как и при счете дюжинами. Отложим 8 яиц, тогда число оставшихся кратно 10 и 12, т.е. кратно 60. Значит, яиц было 368.

Ответ: 368 яиц.

2. Убавим 1 яйцо. Тогда остальные разделятся на 2, 3, 4, 5, и 6 без остатка. Это число кратно 60. Добавим 1. Получим 61, но 61 не делится на 7. Прибавляя по 60, получим 121, затем 181, 241, 301. Проверкой убеждаемся, что подходит 301.

Ответ: 301 яйцо.

3. Обозначим число солдат $x+1$. Тогда x делится на 4, 5, и 6 без остатка, т.е. число кратно 60. Числа 61, 121, 181, 241 не делятся на 7. Тогда солдат было $301+7\cdot 60n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: солдат было $301+7\cdot 60n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

4. Пусть t золотых было у Буратино. По условию задачи $t-1$ кратно 12, 11, 10, 9, 8, 7.

Т.е. $t-1 = \text{ОК}(12, 11, 10, 9, 8, 7) = 27720$. При этом 27720 кратно 6. Умный бандит прав. Монет было 27721.

Ответ: а) Умный бандит прав. Они смогут теперь разделить монеты поровну.

б) Монет было 27721.

5. Пусть x – искомый делитель. По условию
$$\begin{cases} 100 = ax + 4 \\ 90 = bx + 18 \end{cases}, \text{ тогда после преобразований получим: } (a-b)x = 24. \text{ По смыслу задачи } x > 18. \text{ Т.е. } x = 24. \text{ Проверкой убеждаемся, что } 100 = 4 \cdot 24 + 4 \text{ и } 90 = 3 \cdot 24 + 18.$$

Ответ: 24.

Предыдущие задачи в качестве разминки использую также и на уроках в 7-8-х классах. Следующие задачи, кроме предложенных по программе, использую для проведения урочных занятий при прохождении темы «Делимость чисел. Простые и составные числа. Признаки делимости».

Задачи на делимость сумм:

1. При каких значениях n выполняется утверждение:

- | | | |
|-------------------------|------------------------|-------------------------------|
| 1. $7^n - 1 : 6$; | 6. $7^n + 5 : 6$; | 11. $7^n - 2^n : 5$; |
| 2. $15^n - 1 : 7$; | 7. $13^n + 5 : 6$; | 12. $7^n - 6 \cdot 2^n : 5$; |
| 3. $2^n + 3^n : 5$; | 8. $15^n + 6 : 7$; | 13. $7^n + 3^{n+1} : 4$; |
| 4. $2^{2^n} - 1 : 3$; | 9. $15^n + 6 : 7$; | 14. $5^n + 2^{n+1} : 3$; |
| 5. $3^{3^n} - 1 : 13$; | 10. $5^n - 3^n : 16$; | 15. $2^{4^n} - 1 : 15$ |

2. Доказать, что если при некоторых a , b и c выражение $3a+4b+5c:11$, то и выражение $9a+b+4c:11$.

3. а) Мюнхгаузен вырезал из бумаги 10 карточек, на каждой из которых написал по одной цифре от 0 до 9. Затем он разложил их на столе по 2 и обнаружил, что полученные двузначные числа относятся, как 1:2:3:4:5. Не ошибся ли он?

б) Через неделю барон потерял карточку с цифрой 0. Но, подумав, разложил карточки так, что полученные числа относились, как 1:2:3:4:5. Как он этого добился?

4. а). Используя по одному разу цифры 1, 2, 3, ..., 9, напишите такие три трехзначных числа, что второе в 2 раза, третье – в 3 раза больше первого (достаточно показать 1 способ, как это сделать).

б). Из цифр 1, 2, 3, ..., 9 составьте три трехзначных числа так, что они относятся, как 1:2:5.

5. Если к некоторому числу прибавить сумму его цифр, то получится число 1995. Найти это число.

6. Сумма цифр числа x равна сумме цифр числа y , а сумма цифр числа y равна сумме цифр числа z . Найти x , если $x+y+z=60$.

7. Пусть $S(n)$ – сумма цифр n . Решить уравнение:

а) $x + S(x) = 1000\,000\,000$;

б) $x + S(x) + S(S(x)) = 1993$;

в) $x + S(x) + S(S(x)) + S(S(S(x))) = 1993$.

8. Какое четырехзначное число в 83 раза больше суммы цифр?

Решения:

1. Указание: применить формулы $a^n - b^n = (a-b) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$, где $n \in \mathbb{N}$ и $a^n + b^n = (a+b) \cdot (a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1})$, где n – нечетное число.

2. По условию $3a+4b+5c:11$, значит, и

$$3 \cdot (3a+4b+5c):11, \text{ т.е.}$$

$$9a+12b+15c:11,$$

$$\text{но } 9a+12b+15c = 9a+b+4c+11b+11c = (9a+b+4c) + 11 \cdot (b+c).$$

Т.к. сумма двух слагаемых кратна 11, и одно из слагаемых кратно 11, то и другое слагаемое кратно 11. Значит, $9a+b+4c:11$.

3. а) Ответ: нет, это числа 18,36,54,72,90

б) Ответ: 9, 18, 27, 36, 45

4.а) Очевидно, что $219 \cdot 2=438$, $219 \cdot 3=657$. Ответ: 219, 438, 657.

5. Пусть $\overline{abcd}$ – данное число,
тогда по условию $\overline{abcd} + a+b+c+d=1995$,
т.е. $1001a+101b+11c+2d=1995$.

Очевидно, что $a=1$,

$$\text{тогда } 1001+101b+11c+2d=1995, \quad 101b+11c+2d=994.$$

Очевидно также, что $b=9$,

$$\text{тогда } 909+11c+2d=994, \quad 11c+2d=85,$$

очевидно также, что $c=7$,

$$\text{тогда } 77+2d=85, \text{ значит, } 2d=8, \quad d=4.$$

Ответ: 1974.

6. Ответ: $x=44$, $y=z=8$, $x=47$, $y=11$, $z=2$ или $x=50$, $y=z=5$.

7. б). Числа x , $S(x)$ и $S(S(x))$ дают одинаковые остатки при делении на 3, поэтому $x + S(x) + S(S(x))$ кратно 3. Число 1993 не кратно 3. Значит, нет решения.

в). Т.к. $x < 1993$, то $S(x) \leq S(1989)=27$.

Значит, $S(S(x)) \leq S(19)=10$, а $S(S(S(x))) \leq 9$.

Из уравнения следует, что $x=1993 - x - S(x) - S(S(x)) - S(S(S(x))) \geq 1993 - 27 - 10 - 9 = 1947$.

Поскольку числа $S(x)$, $S(S(x))$ и $S(S(S(x)))$ дают одинаковые остатки при делении на 9,

то $x + S(x) + S(S(x)) + S(S(S(x)))$ кратно 9, а число 1993 дает остаток 4,

тогда число x должно давать остаток 1 при делении на 9.

Среди чисел от 1947 до 1993 остаток 1 при делении на 9 дают только 1954, 1963, 1972, 1981 и 1990.

Проверкой убеждаемся, что подходит только 1963.

Ответ: 1963.

8. Такое число единственно, это $1494=83 \cdot 18$.

Указание. Если из искомого числа вычесть его сумму цифр, то получится число, делящееся на 9 и на 82.

Нестандартные задачи

На уроках и при подготовке к олимпиадам и различным математическим турнирам использую в числе других следующие задачи.

1. Докажите, что число $n^3 - n$ делится на 6 при всех целых n .
2. Докажите, что существует бесконечно много чисел, которые не представимы в виде суммы двух квадратов.
3. Докажите, что число, в десятичной записи которого участвуют три единицы и несколько нулей, не может быть квадратом.
4. Докажите, что:
 - а) число $\underbrace{555 \dots 53}_{1992 \text{ цифры}}$ – является составным;
 - б) число $1000^{1000} - 1$ является составным.
5. В числе 4758967* напишите последнюю цифру такую, чтобы число делилось на 2; 5; 3; 9; 4; 25; 11.
6. Докажите, что число $49^{100} - 14^{50}$ кратно 5.
7. Докажите, что для любого натурального n :
 - а) $5^n + 3$ делится на 4;
 - б) $7^n + 5$ делится на 6;
 - в) $13^n + 5$ делится на 6;
 - г) $15^n + 6$ делится на 7;
 - д) $7^n - 1$ кратно 6;
 - е) $15^n - 1$ кратно 7;
 - ж) $3^{3^n} - 1$ кратно 13;
 - з) $2^{4^n} - 1$ кратно 15;
8. Докажите, что число $\overline{\text{МЫШКА}} + \overline{\text{КАМЫШ}}$, где одинаковые буквы означают одинаковые цифры, а разные буквы – разные цифры, не кратно 101.
9. 1996 год – год крысы. Можно ли заменить буквы цифрами так, чтобы выполнялось равенство $\overline{\text{КРЫСА}} - \overline{\text{РЫСАК}} = 1996$? Здесь одинаковые буквы означают одинаковые цифры, а разные буквы – разные цифры.
10. Докажите, что числа $\overline{\text{РАК}}$, $\overline{\text{АКР}}$, $\overline{\text{КАР}}$ одновременно не могут делиться на 7. Здесь одинаковые буквы означают одинаковые цифры, а разные буквы – разные цифры.
11. Какая из двух правильных дробей больше: $\frac{\overline{\text{ТОК}}}{\overline{\text{ТУК}}}$ или $\frac{\overline{\text{СТОК}}}{\overline{\text{СТУК}}}$? Здесь одинаковые буквы означают одинаковые цифры, а разные буквы – разные цифры.

Решения:

1. Разложим данное выражение на множители. $n^3 - n = (n - 1) n (n + 1)$. Мы получили произведение трёх последовательных натуральных чисел. Одно из них обязательно делится на 3, поэтому все произведение делится на 3. По крайней мере, одно из трёх последовательных чисел чётно, поэтому и произведение чётно. Число, делящееся на 2 и 3, делится на 6.
2. Достаточно доказать, например, что числа, имеющие при делении на 4 остаток 3, не представимы в виде суммы двух квадратов. Из равенства $(2k)^2 = 4k^2$, $(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$ следует, что квадрат целого числа при делении на 4 дает остаток 0 или 1. Поэтому сумма двух квадратов не может иметь остаток 3.
3. Если такое число существует, то оно делится на 3, но не делится на 9 (по признакам делимости на 3 и 9). Но если число делится на 3 и является полным квадратом, то оно делится на 9. Получили противоречие.
4. а) 1992 кратно 3, $\Rightarrow 5 \cdot 1992$ кратно 3, $\Rightarrow 555 \dots 53$ кратно 3, $\Rightarrow$ это составное число.

1992 цифры

$$\text{б) } 1000^{1000} - 1 = \underbrace{(1000-1)}_{\text{кратно 3}} (1000^{999} + \dots + 1) \Rightarrow \text{это составное число.}$$

кратно 3

5. С учетом признаков делимости получаем:

на 2 – 0,2,4,6,8;

на 5 – 0,5;

на 3 – 2,5,8;

на 9 – 8;

на 4 – 2,6;

на 25 – 5;

на 11 – 4.

6. Разность $49^{100} - 14^{50}$ оканчивается на 5, т.к. уменьшаемое 49^{100} оканчивается на 1, а вычитаемое 14^{50} оканчивается на 6.

7. а) $5^n + 3 = 5^n - 1 + 1 + 3 = (5^n - 1) + 4 = (5 - 1)(5^{n-1} + \dots + 1) + 4$ кратно 4;б) $7^n + 5 = (7^n - 1) + (1 + 5)$ кратно 6;в) $13^n + 5 = (13^n - 1) + (1 + 5)$ кратно 6;г) $15^n + 6 = (15^n - 1) + (1 + 6)$ кратно 7.д) $7^n - 1$ кратно 6;е) $15^n - 1$ кратно 7;ж) $3^{3n} - 1$ кратно 13;з) $2^{4n} - 1$ кратно 15;

8. $\overline{МЫШКА} + \overline{КАМЫШ} =$

Так как числа 7, 11, 13, 101 – простые, то значит число $\overline{МЫШКА} + \overline{КАМЫШ}$ не кратно 101.

9. $\overline{КРЫСА} - \overline{РЫСАК} = 10000\overline{К} + \overline{РЫСА} - 10\overline{РЫСА} - \overline{К} = 9999\overline{К} - 9\overline{РЫСА} =$
 $= 9(1111\overline{К} - \overline{РЫСА}) \neq 1996$, так как 1996 не кратно 9.

Ответ: нельзя.

10. Доказательство (от противного):

1. Допустим, что $\overline{РАК}$, $\overline{АКР}$ и $\overline{КАР}$ кратны 7.

2. Но $\overline{РАК} = 100\overline{Р} + \overline{АК}$ (1)

$$\overline{АКР} = 10\overline{АК} + \overline{Р} \quad (2)$$

3. $\overline{РАК} + 2\overline{АКР} = 100\overline{Р} + \overline{АК} + 20\overline{АК} + 2\overline{Р} = 102\overline{Р} + 21\overline{АК}$

Из нашего предположения число $\overline{РАК} + 2 \cdot \overline{АКР}$ кратно 7, тогда $21 \cdot \overline{АК}$ кратно 7, значит и $102 \cdot \overline{Р}$ кратно 7.

4. Но т.к. 7 и 102 взаимно простые, то $\overline{Р}$ кратно 7. Т.к. $\overline{Р} \neq 0$, то $\overline{Р} = 7$.

5. Следовательно, равенство (1) принимает вид $\overline{РАК} = 700 + \overline{АК}$, значит $\overline{АК}$ кратно 7

6. Из того, что $\overline{КАР} = 10\overline{КА} + \overline{Р} = 10\overline{КА} + 7$ и $\overline{КАР}$ кратно 7 следует $10\overline{КА}$ кратно 7, значит $\overline{КА}$ кратно 7

7. Т.к. $\overline{АК}$ кратно 7 и $\overline{КА}$ кратно 7, то $(\overline{АК} - \overline{КА})$ кратно 7, значит $9(\overline{А} - \overline{К})$ кратно 7, значит $(\overline{А} - \overline{К})$ кратно 7

Т.к. $\overline{А} \neq 0$ и $\overline{К} \neq 0$, и обе цифры отличные от 7 ($\overline{Р} = 7$), то из того, что $(\overline{А} - \overline{К})$ кратно 7 следует что $\overline{А} = 9$ и $\overline{К} = 2$, или $\overline{А} = 8$ и $\overline{К} = 1$, или $\overline{А} = 1$ и $\overline{К} = 8$, или $\overline{А} = 2$ и $\overline{К} = 9$. Но числа 92, 81, 18 и 29 не кратны 7, а $\overline{АК}$ кратно 7. Мы получили противоречие, значит наше предположение неверно.

11. Т.к. дроби правильные, то $\overline{О} < \overline{У}$, значит $\overline{У} - \overline{О} > 0$

1. Рассмотрим разности: $1 - \frac{\overline{ТОК}}{\overline{ТУК}} = \frac{10(\overline{У} - \overline{О})}{\overline{ТУК}}$ и $1 - \frac{\overline{СТОК}}{\overline{СТУК}} = \frac{10(\overline{У} - \overline{О})}{\overline{СТУК}}$.

2. Т.к. $\frac{10(\bar{Y}-\bar{O})}{\overline{CTYK}} < \frac{10(\bar{Y}-\bar{O})}{\overline{TYK}}$ (дополняют дроби до 1), то $\frac{\overline{CTOK}}{\overline{CTYK}} > \frac{\overline{ТОК}}{\overline{TYK}}$.

Ответ: $\frac{\overline{CTOK}}{\overline{CTYK}} > \frac{\overline{ТОК}}{\overline{TYK}}$.

Некоторые задачи из учебников

Рассмотрим ряд задач из главы III сборника задач по алгебре для 8-9 классов (Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики /авторы М.Л.Галицкий, А.М.Гольдман, Л.И.Звавич/).

1. Докажите, что для любого натурального n :

- а) Нечетная натуральная степень 16, увеличенная на 1, кратна 17
- б) Нечетная натуральная степень 23, увеличенная на 1, кратна 12
- в) Нечетная натуральная степень 11, увеличенная на 13, кратна 12
- г) Нечетная натуральная степень 6, увеличенная на 8, кратна 7

Решение:

а) $16^{2n+1}+1=(16+1)(16^{2n}-16^{2n-1}+\dots+1)=17(16^{2n}-16^{2n-1}+\dots+1)$

б) $23^{2n+1}+1=(23+1)(23^{2n}-23^{2n-1}+\dots+1)=12 \cdot 2(23^{2n}-23^{2n-1}+\dots+1)$

в) $11^{2n+1}+13=11^{2n+1}+13-1+1=(11^{2n+1}+1)+12=12(11^{2n}-11^{2n-1}+\dots+1)+12$

г) $6^{2n+1}+8=6^{2n+1}+8-1+1=(6^{2n+1}+1)+7=7(6^{2n}-6^{2n-1}+\dots+1)+7$

2. а) Нечетная натуральная степень 7, уменьшенная на 1, кратна 48

б) Нечетная натуральная степень 9, уменьшенная на 1, кратна 40

в) Нечетная натуральная степень 4, увеличенная на 14, кратна 15

г) Нечетная натуральная степень 5, увеличенная на 23, кратна 24

Решение:

а) $7^{2n}-1=49^n-1=(49-1)(49^{n-1}+\dots+1)=48 \cdot (49^{n-1}+\dots+1)$

б) $9^{2n}-1=81^n-1=(81-1)(81^{n-1}+\dots+1)=40 \cdot 2 \cdot (81^{n-1}+\dots+1)$

в) $4^{2n}+14=16^n+14-1+1=(16^n-1)+15$

г) $5^{2n}+23=25^n+23-1+1=(25^n-1)+24/$

Рассмотрим ряд задач из главы III учебного пособия для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики «Алгебра для 8 класса» /под редакцией Н.Я.Вилениной/.

1. Укажите все способы уплаты 4800 р., используя банкноты в 200 р. и 500 р.
Возможно ли уплатить эту сумму банкнотами в 500 р. и 1000 р?

Решение:

- 1). Решим в целых неотрицательных числах уравнение: $200x+500y=4800$.

Поделим обе части уравнения на 100, получим $2x+5y=48$.

Т.к. $5=2 \cdot 2+1$, а $2=2 \cdot 1$, то $1=5-2 \cdot 2$. Значит, $2 \cdot (-2)+5 \cdot 1=1$.

Очевидно, что числа $x = -2$ и $y=1$ являются решением уравнения $2x+5y=1$.

Умножим обе части уравнения на 48, получим: $2(48x)+5(48y)=48$. Отсюда

$96x+240y=48$. Т.о., пара $(-96;240)$ является решением уравнения $2x+5y=48$.

Заметим, что при увеличении x на 240 и уменьшении y на 96 выражение

$96x+240y$ не изменяется, следовательно, все другие решения уравнения

$$2x+5y=48 \text{ имеют вид: } \begin{cases} x = -96 + 5t; \\ y = 48 - 2t, t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

По условию x и y – целые неотрицательные числа. Значит, $\begin{cases} -96 + 5t \geq 0; \\ 48 - 2t \geq 0, t \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Решая систему неравенств, получим, $t \in [19;24]$. Подставляя целые значения $t \in [19;24]$, получим искомые пары $(24;0), (19;2), (14;4), (9;6), (4;8)$.

- 2). Решим в целых неотрицательных числах уравнение: $500x+1000y=4800$.

Поделим обе части уравнения на 100, получим $5x+10y=48$.

Левая часть этого уравнения делится на 5, а правая – нет. Значит, в целых неотрицательных числах уравнение: $500x+1000y=4800$ не имеет решения, и невозможно уплатить эту сумму банкнотами в 500 и 1000 р.

Ответ: $(24;0), (19;2), (14;4), (9;6), (4;8)$

2. Найдите общий вид целых неотрицательных чисел, дающих при делении на 7 остаток 3, а при делении на 11 остаток 4.

По условию a и b – целые числа и $\begin{cases} a = 7x + 3 \\ a = 11y + 4, \end{cases} \quad a, x, y \in \mathbb{Z}$

Тогда $7x+3=11y+4$, $7x=11y+1$, $7x-11y=1$. Осталось найти целые решения уравнения $7x-11y=1$.

Заметим, что $7 \cdot (-3) - 11 \cdot (-2) = 1$. Очевидно, что числа $x = -3$ и $y = -2$ являются решением уравнения $7x-11y=1$.

Заметим, что при увеличении x на 11 и y на 7 значение выражения $7x-11y$ не изменяется, следовательно, все другие решения уравнения $7x-11y=1$ имеют вид:

$$\begin{cases} x = -3 + 11t; \\ y = -2 + 7t, t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Очевидно, что $7x-11y=7(-3+11t)-11(-2+7t)=-21+77t+22-77t=1$

Проверка:

$$a=7x+3=7(-3+11t)+3=-21+77t+3=77t-18 \text{ или}$$

$$a=11y+4=11(-2+7t)+4=-22+77t+4=77t-18. \text{ Иначе } a=77(t+1)-18=77t+59, \text{ где } t \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $a=77t+59$, где $t \in \mathbb{Z}$.

3. Разделите 200 на два слагаемых так, чтобы при делении одного на 6, а другого на 11 получилось соответственно в остатке 5 и 4.

По условию $200=a+b$, причем, $a=6x+5$, $b=11y+4$, где x и y – целые числа. Отсюда $6x+5+11y+4=200$, $6x+11y=191$.

Решая в целых числах уравнение $6x+11y=191$, получим: $a=185$, $b=15$.

Ответ: 185, 15.

Сравнения.

В старших классах школы при подготовке к ЕГЭ часто оказывается полезной тема «Сравнения». Рассмотрим немного теории и задач по данной теме.

Пусть m – произвольное натуральное число, большее 1. Каждое целое число при делении на m дает некоторый остаток, причем разных остатков будет ровно m (от 0 до $m-1$). Если целые числа a и b при делении на натуральное число m , дают равные остатки, то говорят, что они сравнимы по модулю m и пишут $a \equiv b \pmod{m}$.

Свойства сравнения следуют из свойств делимости чисел.

- 1) Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $b \equiv c \pmod{m}$, то $a \equiv c \pmod{m}$.
- 2) Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то
 $a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$, $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}$, $a^k \equiv b^k \pmod{m}$, где $k \in \mathbb{N}$.
- 3) Если $a + b \equiv c \pmod{m}$, то $a \equiv c - b \pmod{m}$
- 4) Если $ak \equiv bk \pmod{m}$, а числа m и k взаимно просты, то $a \equiv b \pmod{m}$
- 5) Если $a \equiv b \pmod{m}$ и d делитель m , то $a \equiv b \pmod{d}$.

Малая теорема Ферма

Рассмотрим малую теорему Ферма и следующие примеры.

Теорема (малая теорема Ферма). Если p – простое число и число a не делится на p , то $a^{p-1}-1$ делится на p (или $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$).

Доказательство: Так как a и p взаимно просты, то остатки от деления на p чисел a , $2a$, $3a$..., $(p-1) \cdot a$ – это с точностью до перестановки числа $1, 2, \dots, p-1$, т.е. $a \cdot 2a \cdot 3a \cdot \dots \cdot (p-1) \cdot a \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p-1) \pmod{p}$.

Отсюда $a^{p-1} \cdot (p-1)! \equiv (p-1)! \pmod{p}$. Сократив обе части сравнения на $(p-1)!$, получим $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ или $a^p \equiv a \pmod{p}$, ч.т.д.

Задачи:

1. Найти остаток от деления числа a на число m , если:

- 1) $a = 26^{36}$, $m=7$, 2) $a = 2007^{2009}$, $m=13$, 3) $a = 24^{25} \cdot 36^{11} \cdot 49^{15}$, $m=11$.
- 4) $a = 30^{27^{147}}$, $m=13$, 5) $a = 222^{555}$, $m=7$, 6) $a = 91^{10} + 42^{10} - 85^{10}$, $m=10$.

2. Доказать, что число a делится на число m , если:

- 1) $a = 96^{19} + 32^{13} - 8 \cdot 73^{16}$, $m=10$.
- 2) $a = (17^{15} + 15^{17})^{1517}$, $m=32$.

3. На какую цифру оканчивается число:

1) 2^{100} , 2) $33^{77}+77^{33}$, 3) 999^{999} .

4. Найти 2 последние цифры в записи числа 2^{2000} .

5. Доказать, что если целое число a не делится на 5, то число a^4-1 делится на 5.

6. Доказать, что целое число a не может быть квадратом натурального числа, если число $a-3 \div 7$.

7. Найти остаток от деления на 11 числа $a=(987654321)^4$.

8. На сколько нулей заканчивается число $9^{999}+1$?

9. Доказать, что $43^{23}+23^{43}$ кратно 66.

10. Доказать, что $91^{10}+42^{10}-85^{10}$ кратно 10.

11. Найти остаток от деления на 7 числа 222^{555} .

Решение:

1. 1). Т.к. $26 \equiv -2 \pmod{7}$, то $26^{36} \equiv (-2)^{36} \pmod{7}$.

$$(-2)^4 = 16 \equiv 2 \pmod{7},$$

$$(-2)^8 = (-2)^4 \cdot (-2)^4 \equiv 2 \cdot 2 \pmod{7} = 4 \pmod{7},$$

$$(-2)^{16} \equiv 4 \cdot 4 = 16 \equiv 2 \pmod{7},$$

$$(-2)^{32} \equiv 2 \cdot 2 \pmod{7} = 4 \pmod{7},$$

$$(-2)^{36} = (-2)^4 \cdot (-2)^{32} \equiv 2 \pmod{7} \cdot 4 \pmod{7} \equiv 8 \pmod{7} \equiv 1 \pmod{7}.$$

Ответ: 1.

2. 1). Достаточно доказать, что данная сумма оканчивается на 0.

$$96^{19} \equiv 6 \pmod{10},$$

$$32^{13} \equiv 2^{13} \pmod{10} \equiv 2 \pmod{10},$$

$$73^{16} \equiv 3^{16} \pmod{10} \equiv 1 \pmod{10},$$

$$8 \cdot 73^{16} \equiv 8 \cdot 1 \pmod{10} = 8 \pmod{10},$$

Т.о., получаем, что $a = 96^{19} + 32^{13} - 8 \cdot 73^{16} \equiv 6 + 2 - 8 = 0 \pmod{10}$, значит, число оканчивается 0, т.е. делится на 10.

3. 1). Рассмотрим остатки от деления степеней 2 на 10.

$2^1 \equiv 2 \pmod{10}$, $2^2 \equiv 4 \pmod{10}$, $2^3 \equiv 8 \pmod{10}$, $2^4 \equiv 6 \pmod{10}$, $2^5 \equiv 2 \pmod{10}$, ... Видно, что остатки повторяются с периодом 4. Значит, $2^{4k+l} \equiv 2^l \pmod{10}$, где $l=1,2,3,4$. Отсюда следует, что $2^{100} \equiv 2^4 \pmod{10} \equiv 6 \pmod{10}$.

Ответ: 6.

2). Рассмотрим остатки от деления степеней 3 и 7 на 10.

$$3^1 \equiv 3 \pmod{10},$$

$$3^2 \equiv 9 \pmod{10},$$

$$3^3 \equiv 7 \pmod{10},$$

$$3^4 \equiv 1 \pmod{10},$$

$$3^5 \equiv 3 \pmod{10}, \dots$$

Видно, что остатки повторяются с периодом 4. Значит, $3^{4k+l} \equiv 3^l \pmod{10}$, где $l=1,2,3,4$. Отсюда следует, что $3^{77} \equiv 3^1 \pmod{10} \equiv 3 \pmod{10}$.

$$7^1 \equiv 7 \pmod{10},$$

$$7^2 \equiv 9 \pmod{10},$$

$$7^3 \equiv 3 \pmod{10},$$

$$7^4 \equiv 1 \pmod{10},$$

$$7^5 \equiv 7 \pmod{10}, \dots$$

Видно, что остатки повторяются с периодом 4. Значит, $7^{4k+l} \equiv 7^l \pmod{10}$, где $l=1,2,3,4$. Отсюда следует, что $7^{33} \equiv 7^1 \pmod{10} \equiv 7 \pmod{10}$.

Т.о., $33^{77} + 77^{33}$ оканчивается 0.

3). Рассмотрим остатки от деления степеней 9 на 10.

$$9^1 \equiv 9 \pmod{10},$$

$$9^2 \equiv 1 \pmod{10},$$

$$9^3 \equiv 9 \pmod{10},$$

$$9^4 \equiv 1 \pmod{10},$$

Видно, что остатки повторяются с периодом 2. Значит, $9^{2k+l} \equiv 9^l \pmod{10}$, где $l=1,2$.

Отсюда

$$999^{999} \equiv 9^{999} \equiv 9^{99} \equiv 9 \pmod{10}, \text{ т.е. } 999^{999} \text{ оканчивается на } 9.$$

4. Рассмотрим остатки от деления степеней 2 на 100.

$$2^1 \equiv 2 \pmod{100},$$

$$2^2 \equiv 4 \pmod{100},$$

$$2^3 \equiv 8 \pmod{100},$$

$$2^4 \equiv 16 \pmod{100},$$

$$2^5 \equiv 32 \pmod{100},$$

$$2^6 \equiv 64 \pmod{100},$$

$$2^7 \equiv 28 \pmod{100},$$

$$2^9 \equiv 12 \pmod{100},$$

$$2^{10} \equiv 24 \pmod{100},$$

$$2^{11} \equiv 48 \pmod{100},$$

$$2^{12} \equiv 96 \pmod{100},$$

$$2^{13} \equiv 92 \pmod{100},$$

$$2^{14} \equiv 84 \pmod{100},$$

$$2^{15} \equiv 68 \pmod{100},$$

$$2^{16} \equiv 36 \pmod{100},$$

$$2^{17} \equiv 72 \pmod{100},$$

$$2^{18} \equiv 44 \pmod{100},$$

$$2^{19} \equiv 88 \pmod{100},$$

$$2^{20} \equiv 76 \pmod{100},$$

$$2^{2000} \equiv (2^{20})^{100} \pmod{100} \equiv 76^{100} \pmod{100} \equiv 76 \pmod{100},$$

Отсюда следует, что $2^{2000} \equiv 76 \pmod{100}$.

Ответ: 76.

5. Пусть r – остаток от деления a на 5, тогда $a=5k+r$, где $k \in \mathbb{Z}$, R – одно из чисел 1, 2, 3, 4, т.к. a не делится на 5. По свойству сравнений, если $a \equiv r \pmod{5}$, то $a^4 \equiv r^4 \pmod{5}$. Учитывая, что $1^4 \equiv 2^4 \equiv 3^4 \equiv 4^4 \equiv 1 \pmod{5}$, т.е. $r^4 \equiv 1 \pmod{5}$ при $r=1, 2, 3, 4$, получим, $a^4 \equiv 1 \pmod{5}$, т.е. $a^4 - 1$ делится на 5, что и требовалось доказать.

6. Если $a \equiv 3 \pmod{7}$, то $a \equiv 3 \pmod{7}$.

Пусть $a=n^2$, тогда $n^2 \equiv 3 \pmod{7}$.

Построим таблицу остатков при делении на 7 целого числа n и его квадрата:

n	0	1	2	3	4	5	6
n^2	0	1	4	2	2	4	1

Из таблицы видно, что остатка 3 у числа n^2 не получается, что и требовалось доказать.

7. Пусть b – основание данной степени, тогда $a=b^4$. Сумма $1-2+3-4+5-6+7-8+9$, составленная из цифр числа b (с чередующимися знаками), равна 5. Поэтому $b \equiv 5 \pmod{11}$, откуда следует, что $a=b^4 \equiv 5^4 \pmod{11} \equiv (5^2)^2 \equiv 9 \pmod{11}$. Следовательно, искомый остаток равен 9.

8. $9^{999} = 9^{499 \cdot 2 + 1} \equiv 9 \pmod{2}$, т.е. число 9^{999} оканчивается на 9. Тогда число $9^{999} + 1$ оканчивается на 0.

9. 1). $43 \equiv -23 \pmod{66}$, $43^{23} \equiv (-23)^{23} \pmod{66}$.

$$(-23)^2 = 529 \equiv 1 \pmod{66},$$

$(-23)^{23} = (-23)^{22+1} = (-23)^{22} \cdot (-23) \equiv (-23) \pmod{66} \equiv 43 \pmod{66}$, т.е. остаток от деления 43^{23} на 66 равен 43.

2). $23^{43} = 23^{40+3} \equiv 23^3 \pmod{66}$, т.е. $23^2 \cdot 23 \equiv 23 \pmod{66}$, т.е. остаток от деления 23^{43} на 66 равен 23.

3). Очевидно, что $\equiv$ данное число оканчивается на $43+23=66$, что и требовалось доказать.

10. Нетрудно доказать, что 91^{10} оканчивается на 1, 42^{10} оканчивается на 4 и 85^{10} оканчивается на 5. Тогда число $91^{10} + 42^{10} - 85^{10}$ оканчивается на 0, т.е. кратно 10, что и требовалось доказать.

11. $222 \equiv 5 \pmod{7}$, поэтому $222^{555} \equiv 5^{555} \pmod{7}$.

Теперь посмотрим, как повторяются остатки степеней 5 при делении на 7.

Находим:

$$5^2 \equiv 25 \equiv 4 \pmod{7},$$

$$5^3 \equiv 4 \cdot 5 \equiv 6 \pmod{7},$$

$$5^4 \equiv 6 \cdot 5 \equiv 2 \pmod{7},$$

$$5^5 \equiv 2 \cdot 5 \equiv 3 \pmod{7},$$

$$5^6 \equiv 3 \cdot 5 \equiv 1 \pmod{7}.$$

Возводя в степень k , получаем $5^{6k} \equiv 1 \pmod{7}$ при любом натуральном k .

Поэтому $5^{555} = 5^{6 \cdot 92} \cdot 5^3 \equiv 6 \pmod{7}$.

(Геометрически это равенство означает, что мы проходим по кругу, стартуя от 5, девяносто два цикла и еще три числа). Таким образом, число 222^{555} дает при делении на 7 остаток 6.

Ответ: 6.

Решение уравнений в целых числах.

Несомненно, одна из интересных тем математики – решение диофантовых уравнений. Эта тема изучается в 8, а затем и в 10 и 11 классе.

Любое уравнение, которое требуется решить в целых числах, называется диофантовым уравнением. Простейшим из них является уравнение вида $ax+by=c$, где a, b и $c \in \mathbb{Z}$. При решении этого уравнения используется следующая теорема.

Теорема. Линейное диофантово уравнение $ax+by=c$, где a, b и $c \in \mathbb{Z}$ имеет решение тогда и только тогда, когда c делится на НОД чисел a и b . Если $d = \text{НОД}(a, b)$, $a = a_1d$, $b = b_1d$, $c = c_1d$ и (x_0, y_0) – некоторое решение уравнения $ax+by=c$, то все решения задаются формулами $x = x_0 + b_1t$, $y = y_0 - a_1t$, где t – произвольное целое число.

1. Решить в целых числах уравнения:

$$1. \quad 3xy - 6x^2 = y - 2x + 4;$$

$$6. \quad x + y = xy;$$

$$2. \quad (x-2)(xy+4)=1;$$

$$7. \quad y - x - xy = 2;$$

$$3. \quad 2x^2 + xy = x + 7;$$

$$8. \quad 3xy + 2x + 3y = 0;$$

$$4. \quad x^2 - xy - x + y = 1;$$

$$9. \quad y + 4x + 2xy = 0;$$

$$5. \quad x^2 - 3xy = x - 3y + 2;$$

$$10. \quad x^2 - xy - y = 4.$$

2. Следующие задачи рассматривала с выпускниками при подготовке к ЕГЭ по математике по данной теме.

1). Решить в целых числах уравнение: $xy + 3y + 2x + 6 = 13$.

Решение:

Разложим на множители левую часть уравнения. Получим:

$$y(x+3) + 2(x+3) = 13; \quad (x+3)(y+2) = 13.$$

Так как $x, y \in \mathbb{Z}$, то получим совокупность систем уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} x+3=1 \\ y+2=13 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=-2 \\ y=11 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x+3=13 \\ y+2=1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=10 \\ y=-1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x+3=-1 \\ y+2=-13 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=-4 \\ y=-15 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x+3=-13 \\ y+2=-1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=-15 \\ y=-3 \end{array} \right.$$

Ответ: $(-2; 11)$, $(10; -1)$, $(-4; -15)$, $(-15; -3)$

- 2). Решить в натуральных числах уравнение: $3^x + 4^y = 5^z$.
- 3). Решить в целых числах уравнение: $4 \cdot 3^x - 35 = y^2$.
- 4). Решить в целых числах уравнение: $2^x - 63 = y^2$.
- 5). Решить в целых числах уравнение: $4xy + 13y^2 + x^2 = 58$.
- 6). Решить в целых числах уравнение: $xy + 3y + 2x + 6 = 13$.
- 7). Решить в целых числах уравнение: $3x + 2y = 7$.
- 8). Решить в целых числах уравнение: $x(x+1) = 4y(y+1)$.
- 9). Найти все пары натуральных чисел m и n , для которых справедливо равенство $3^m + 7 = 2^n$.
- 10). Найти все тройки натуральных чисел k , m и n , для которых справедливо равенство: $2 \cdot k! = m! - 2 \cdot n!$ ($1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$, $\dots n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$)
- 11). Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, или в 14 раз больше, или в 14 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 4321.
 - а) Может ли последовательность иметь два члена?
 - б) Может ли последовательность иметь три члена?
 - в) Какое наибольшее число членов может иметь последовательность?

Решение:

- а) Пусть $a_1 = x$, тогда $a_2 = 14x$ или $a_1 = 14x$, тогда $a_2 = x$. Тогда по условию $a_1 + a_2 = 4321$. Получим: $x + 14x = 4321$, $15x = 4321$, но 4321 не кратно 15, значит, двух членов в последовательности быть не может.
- б) Пусть $a_1 = x$, тогда $a_2 = 14x$, $a_3 = x$, или $14x + x + 14x = 4321$, или $x + 14x + x = 4321$. $29x = 4321$, тогда $x = 149$, $14x = 2086$. Значит, последовательность может иметь три члена. Во втором случае $16x = 4321$, но тогда x не является натуральным числом.
- в) Так как сумма двух соседних чисел кратна 15, а $4321 = 15 \cdot 288 + 1$, то последний член последовательности равен 1, тогда $n = 288 \cdot 2 + 1 = 577$.

Ответ: а) нет; б) да; в) 577.

12). Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, или в 10; раз больше, или в 10 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 1860.

- а) Может ли последовательность иметь два члена?
- б) Может ли последовательность иметь три члена?
- в) Какое наибольшее число членов может иметь последовательность?

Очевидно, что говорить о делимости целых чисел и рассматривать задачи по данной теме можно бесконечно. Я постаралась рассмотреть эту тему так, чтобы в большей степени заинтересовать учащихся, показать им красоту математики еще и с этой с точки зрения.

Список литературы:

1. А. Я. Каннель-Белов, А. К. Ковальджи. Как решают нестандартные задачи Москва МЦНМО 2001
2. А.В.Спивак. Приложение к журналу Квант№4/2000 Математический праздник, Москва 2000
3. А.В.Спивак. Математический кружок, «Посев» 2003
4. Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных. Математический кружок. Задачник первого-второго года обучения. Санкт-Петербург. 1993
5. Алгебра для 8 класса. Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. Под редакцией Н.Я.Виленкина. Москва, 1995 г.
6. М.Л.Галицкий, А.М.Гольдман, Л.И.Звавич. Сборник задач по алгебре для 8-9 классов. Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. Москва, Просвещение. 1994 г.
7. Ю.Н.Макарычев, Н.Г.Миндюк, К.И.Нешков. Алгебра 8 класс. Учебник для школ и классов с углубленным изучением математики. Москва, 2001 г.
8. М.И.Шабунин, А.А.Прокофьев УМК МАТЕМАТИКА Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень. Учебник для 11 класса. Москва Бином. Лаборатория знаний 2009
9. М.И.Шабунин, А.А.Прокофьев, Т.А.Олейник, Т.В.Соколова. УМК МАТЕМАТИКА Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень Задачник для 11 класса. Москва Бином. Лаборатория знаний 2009
10. А.Г.Клово, Д.А.Мальцев, Л.И.Абзелилова Математика. Сборник тестов по плану ЕГЭ 2010
11. ЕГЭ УМК «Математика. Подготовка к ЕГЭ». Под редакцией Ф.Ф.Лысенко, С.Ю.Кулабухова. Подготовка к ЕГЭ-2010. «Легион-М». Ростов-на-Дону 2009
12. ЕГЭ УМК «Математика. Подготовка к ЕГЭ». Под редакцией Ф.Ф.Лысенко, С.Ю.Кулабухова. Подготовка к ЕГЭ-2011. «Легион-М». Ростов-на-Дону 2010
13. УМК «Математика. ЕГЭ-2010». Под редакцией Ф.Ф.Лысенко, С.Ю.Кулабухова. МАТЕМАТИКА Подготовка к ЕГЭ-2010. Учебно-тренировочные тесты. «Легион-М». Ростов-на-Дону 2009
14. ФИПИ ЕГЭ. Универсальные материалы для подготовки учащихся МАТЕМАТИКА 2010 «Интеллект-Центр» 2010
15. А.Ж.Жафяров. Математика. ЕГЭ-2010 Экспресс-консультация. Сибирское университетское издательство, 2010