XI городская олимпиада по математике, 1 марта 2020 г.

7 класс

1. Над лесом летит стая сороконожек и трехголовых драконов. У них всего 26 голов и 298 ног. У каждой сороконожки ровно одна голова. Сколько ног у трехголовых драконов? (У каждой сороконожки 40 ног и одна голова, а у каждого трехголового дракона три головы)

Ответ: *14 ног*

Решение. Пусть сороконожек — x штук. Трехголовых драконов y штук. Всего ног у сороконожек $40x$ штук, голов – у штук, а голов у трехголовых драконов $3y$ штук. Тогда $x+3y=26$, $x<8$ (т. к. $40x<298$), выполним полный перебор (если в строке с y стоит «-», то оно не целое, а следовательно не подходит нам):

x	1	2	3	4	5	6	7
y	-	8	-	-	7	-	-

x=2: 2×40=80; 298-80=218 (общее количество ног у драконов) не делится 8 (Значит не подходит, так как всего драконов при таком количестве сороконожек 8)
x=5: 5×40=200; 298-200=98 (общее количество ног у драконов) делится на 7, тогда 98:7 =14.

2. Вася выписал все числа от 1 до 2020. На сколько больше он написал единиц, чем троек?

Ответ: *1010*

Решение. Рассмотрим сначала числа от 1 до 999. Если в таком числе заменить единицы на тройки и наоборот, тройки на единицы (если они там есть), то получится число из этого же списка. Отсюда следует. что в записи всех чисел от 1 до 999 единиц и троек поровну. Теперь заметим, что все числа от 1000 до 1999 начинаются на единицу, а если у каждого из чисел ее мысленно стереть. то среди оставшихся цифр единиц и троек снова будет поровну (это все те же числа от 1 до 999, только иногда с приписанными впереди нулями). Таким образом, написав числа от 1 до 1999, Вася использовал на 1000 больше единиц, чем троек.
Нам осталось рассмотреть только числа от 2000 до 2020. Для их написания Васе понадобилось 12 единиц и 2 тройки, то есть единиц здесь еще на 10 больше. Поэтому всего Вася написал на 1010 больше единиц, чем троек.

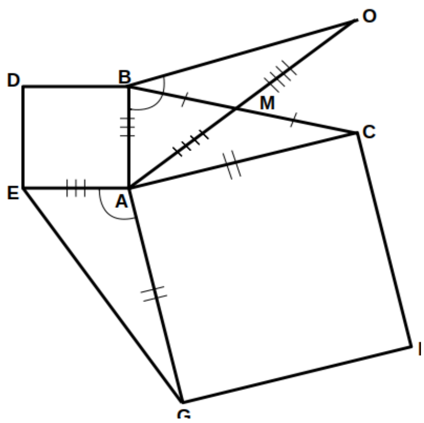
3. Пусть AM - медиана треугольника ABC. На сторонах AB и AC вне треугольника построены квадраты ABDE и ACFG. Докажите, что GE=2AM.

Доказательство. Проведем из вершины B прямую n, параллельную AC, и продолжим медиану AM за точку M. Пусть $n \cap AM = O$.

А) заметим равенство треугольников ACM и OBM по стороне и двум прилежащим к ней углам. Тогда AM=OM, AC=BO и AO=2AM.

Б) Пусть угол GAE равен x. Тогда угол BAC равен 180^0-x, угол ABO=x.

В) Нетрудно доказать равенство треугольников GAE и ABO по двум сторонам и углу между ними, откуда получим AO=GE и GE=2AM.



4. В классе несколько (не менее 2-х) мальчиков и несколько (не менее 2-х) девочек. Каждый мальчик поприветствовал каждую девочку рукопожатием, а также все дети пожали руку учителю.

А) Могло ли получиться 100 рукопожатий?

Б) Могло ли получиться 99 рукопожатий? Сколько тогда детей в классе?

Ответ: А — невозможно, В -возможно, всего детей 27, 23 или 18

Решение. пусть x мальчиков и y девочек.

Тогда общее число рукопожатий равняется xy+x+y

А) Пусть xy+x+y=100, тогда xy+x+y+1=101 или (x+1)(y+1)=101, а 101 – простое число. Невозможно.

Б) Пусть xy+x+y=99, тогда xy+x+y+1=100 или $(x+1)(y+1)=100=2^2\cdot 5^2$. Каждый множитель слева не менее трёх, тогда существуют три варианта: 4·25 или 5·20 или 10·10. Тогда детей могло быть 27, 23, 18.

5. Имеются контейнеры размером 1×1×3 метра и ангар в форме прямоугольного параллелепипеда объёмом 800 кубических метров, габаритные размеры которого (длина, ширина, высота) – целые числа. Какую наибольшую долю ангара можно заполнить такими контейнерами при любых его габаритных размерах?

Ответ: 99%.

Решение: Рассмотрим ангар размерами 2×2×200 метров. Очевидно, что для минимизации пустот, контейнеры будем располагать таким образом, что их длинная сторона будет направлена вдоль 200-метровой стороны ангара. В этом случае можно без пропусков заполнить контейнерами прямоугольный параллелепипед размером 2×2×198 метров. Останется незаполненным куб размерами 2×2×2 метра. Его объём 8 кубических метров, что составляет 1% от объёма ангара.

Предположим, что незаполненная область представляет собой прямоугольный параллелепипед размерами x×y×z, где переменные – целые числа, а его объём более 8 кубических метров, но тогда хотя бы одна из переменных, например, z, будет не менее 3 метров, а значит вдоль этой стороны можно поместить x×y контейнеров, и так до тех пор, пока не останется параллелепипед размерами 1×1×1 или 1×1×2 или 1×2×2 или 2×2×2 метра.